

河北大学

硕士学位论文

平面上的一种随机行走模型及其计算机模拟

姓名：张国春

申请学位级别：硕士

专业：应用数学

指导教师：王熙照

20100601

摘 要

随机行走问题一直广受众多研究者的关注，并已广泛应用于物理学、化学、生物学、经济学等许多领域。由于实际的需要，各种受限的随机行走模型得到了深入研究，如对称随机行走、带有吸收壁的随机行走、带有反射壁的随机行走等。本文根据一个赌博游戏，构建了一个有限步的带有双侧吸收壁的随机行走模型，运用母函数、组合数公式及递推关系，从特殊到一般给出并证明了质点从起始点出发到达双侧吸收壁及终点线的一系列概率计算公式。由于这一模型是有限步的，不能考虑极限行为，所以，给出了一些计算机模拟图，通过这些图，可以发现其概率变化规律。

关键词 随机行走 有限步的随机行走 赌博游戏 母函数 吸收壁 计算机模拟

Abstract

The random walks have received many researchers' attention, and have been widely applied in many fields such as physical science, chemistry, biology, economics and etc. Owing to our finite real world, many restricted random walks, such as symmetric random walks, random walks with absorbent boundaries, random walks with reflecting boundaries have been investigated deeply. In this paper, based on a gambling game, a model of finite step random walk with bilateral absorption barriers is constructed and investigated. Using generating function, the formulas of combination and recursion relation, a series of probability formula of particle from the original point to the bilateral absorption barriers and finish line is showed and proved by special situation to general situation. Considering the finite model and no discuss its limit process, we provide some graphs of computer simulation for the random walk, by the graphs we can find the regularity of the probability in the random walk model.

Keywords random walk finite-step random walk gambling game generating function absorption barriers computer simulation

河北大学

学位论文独创性声明

本人郑重声明： 所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知， 除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得河北大学或其他教育机构的学位或证书所使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了致谢。

作者签名： 张同春 日期： 2010 年 5 月 28 日

学位论文使用授权声明

本人完全了解河北大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。

本学位论文属于

- 1、保密 ☐ ，在 _____ 年 _____ 月 _____ 日解密后适用本授权声明。
- 2、不保密 ☒ 。

（ 请在以上相应方格内打 “√” ）

保护知识产权声明

本人为申请河北大学学位所提交的题目为(平面上的一种随机行走模型及其计算机模拟)的学位论文,是我个人在导师(王熙照)指导并与导师合作下取得的研究成果,研究工作及取得的研究成果是在河北大学所提供的研究经费及导师的研究经费资助下完成的。本人完全了解并严格遵守中华人民共和国为保护知识产权所制定的各项法律、行政法规以及河北大学的相关规定。

本人声明如下:本论文的成果归河北大学所有,未经征得指导教师和河北大学的书面同意和授权,本人保证不以任何形式公开和传播科研成果和科研工作内容。如果违反本声明,本人愿意承担相应法律责任。

声明人: 张同春 日期: 2010 年 5 月 28 日

作者签名: 张同春 日期: 2010 年 5 月 28 日

导师签名: 王熙照 日期: 2010 年 5 月 28 日

第1章 绪论

1.1 课题研究的目的是与意义

自 1905 年 Person 正式提出随机行走 (random walk) 的概念以来, 在数学领域上已经对其进行了广泛深入的研究, 并已扩充至物理、化学、生物、工程经济等其他众多领域^[1-4]。从目前文献来看, 已有多种随机行走模型, 如直线上的随机行走模型、平面上的随机行走模型等。设 x 轴上的一个质点, 假定它只能处于整数点, 在时刻 $t=0$ 时, 它位于初始 a (a 是整数), 以后每隔单位时间, 它总是受到一个外力的随机作用, 使位置发生变化, 分别以概率 p 及概率 $q=1-p$ 向正的或负的方向移动一个单位。我们所关心的是质点在时刻 $t=n$ 时的位置, 用这种方法描述的质点运动称为随机行走^[5-7]。若质点可以在整个数轴的整数点上运动, 则称这种随机行走为无限制随机行走; 若在数轴上的某点处有一个吸收壁, 即质点一到达这个位置就被吸收而不再行走, 因而整个行走也就结束了, 这种随机行走称为在该点有吸收壁的随机行走。关于有吸收壁的随机行走可分为有一个及两个吸收壁的随机行走, 以上是直线上的随机行走。随机行走的一般描述如下: 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ 上的独立同分布的随机变量, 定义 $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n (n \geq 1)$, 称 $\{S_n : n \geq 0\}$ 为随机行走。

若 $X_k = \pm 1$, 且 $P\{X_k = -1\} = p, P\{X_k = 1\} = 1-p$, 则称 $\{S_n : n \geq 0\}$ 为一维整数格点上的简单随机行走, 如图 1-1 所示:

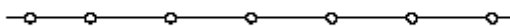


图 1-1 一维整数格点上的简单随机行走

若 $p = q = \frac{1}{2}$, 则称为简单对称随机行走。

可以用形象的语言描述简单随机行走。设一质点在时刻 0 位于原点; 在时刻 1, 以概率 p 向右移动一步到达位置 1, 以概率 $1-p$ 向左移动一步到达位置 -1; 在时刻 2, 又以概率 p 向右移动一步, 以概率 $1-p$ 向左移动一步……这样一直继续下去, 则 $\{S_n\}$ 是质点在时刻 n 的位置。

简单随机行走有广泛的实际背景，可以作为物理、化学、生物、交通、金融和日常生活中许多问题的数学模型。

除一维格点上的简单随机行走外，还有高位空间上的随机行走，如二维格点上的简单随机行走，质点从起始点出发，依次以 $1/4$ 的概率向相邻的四个点之一移动一个单位（上、下、左、右位），如图 1-2 所示，这实际上是平面格点上的简单对称随机行走；三维格点上的简单对称随机行走，则是质点从起始点出发依次以 $1/6$ 的概率向相邻的六个点之一移动一个单位，如图 1-3 所示。一般地， d 维格点上的简单对称随机行走就是质点以 $1/2d$ 的概率向相邻的 $2d$ 个点之一移动一个单位。

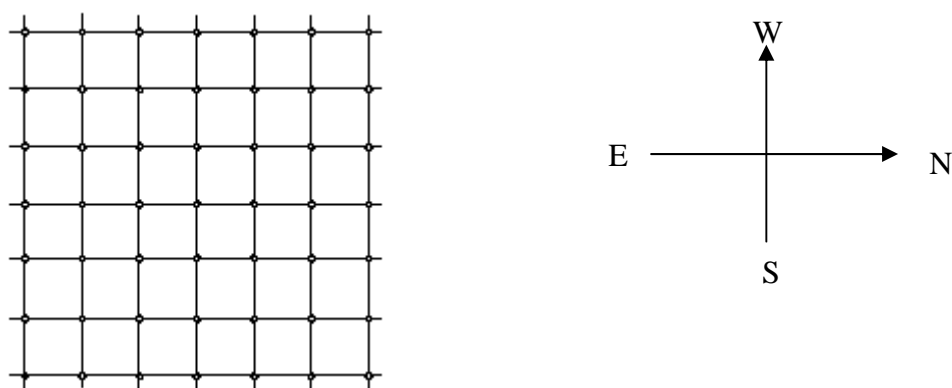


图 1-2 二维格点上的简单对称随机行走

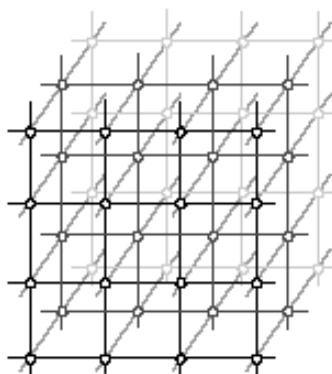


图 1-3 三维格点上的简单对称随机行走

随着对随机行走的一些具体讨论，我们将这一概率模型与实际问题联系起来，用以解决类似于赌徒输光问题、家族姓氏延续问题等。同时，随机行走模型可以作为布朗运动的初步近似，随机行走几乎可以立即推广到(一维)扩散过程，与分枝过程也有密切联系。金融界中关于股票价格涨落和汇率变化是否具有随机行走特征，更是现代金融界最充满火药味的论争之一。概率论中的一些古典问题也可引导到随机行走的问

题，它可以看作为贝努利实验的一种描述法。由此可见，我们对于随机行走的进一步深入研究是必要的。

由于实际的需要，各种受限的随机行走模型引起了许多研究者的兴趣^[5]，如简单随机行走、对称随机行走、带有吸收壁的随机行走、带有反射壁的随机行走、格点上的随机行走等^[6-14]。本文从赌博游戏出发，研究了一种受限的随机行走模型，即带有双侧吸收壁的有限步的随机行走模型，从特殊到一般，推导出了质点从起始点出发到达双侧吸收壁及终点线的概率计算公式。

1.2 本课题的国内外发展现状

随机行走是 1905 年 Karl Person 在 Nature 中提出的^[8]，其问题描述如下：一个人从点 o 出发，沿一条直线行走 l 码，然后转一个角度延另一条直线继续行走 l 码，如此反复 n 次，求经 n 次后，此人与起点 o 的距离介于 r 和 $r + \delta r$ 之间的概率。这一问题几周后由 Lord Rayleigh^[8]解答出来，当 n 很大时，此概率值为 $\frac{2}{nl^2} e^{-r^2/nl^2} r \delta r$ 。自随机行走的概念产生以来，在生物、化学、物理^[1-4]等许多领域得到了广泛深入地研究和应用。

考虑下面的问题：两名选手 A 和 B 通过掷硬币决定输赢，一次掷硬币 A 赢 B 的概率为 p ，输的概率为 $q=1-p$ 。假定掷一次硬币，A 或 B 赢或输一个本金，而且起初 A 有 a 个本金，B 有 b 个本金，那么，A 赢完 B 的所有本金的概率是多少？每个选手输光的概率是多少？令 x_k 表示第 k 次掷硬币 A 赢 B 的本金数，则 x_k 是随机变量，因此 $P(x_k=1)=p, P(x_k=-1)=q$ ， n 次掷硬币后 A 现有的本金总数 $A_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ，令 $P_n(k)$ 表示 $A_n = k$ 的概率，事件 $A_n = k$ 发生有两种可能，一种是 A 在第 n 次掷硬币时以概率 p 赢，此时 $A_n = k-1$ ，另一种是 A 在第 n 次掷硬币时以概率 q 输，此时 $A_n = k+1$ ，因此得到递推关系 $P_n(k) = pP_{n-1}(k-1) + qP_{n-1}(k+1)$ ，这实际上是简单有序的马尔可夫过程^[9]。

对受限的随机行走问题的研究由于实际的需要而产生。其端点起始于某一不可穿透壁，而受限于此壁的随机行走，可以作为最简单的受限随机行走问题之一。1919—1921 年，George Polya 提出了格点随机行走。格点随机行走指的是在整数点上的行走，有一维、二维、多维格点上的随机行走。在二维平面格点上，一个随机行走者

以 $1/4$ 的概率到达 N、S、E、W(如图 1-1), 在 d -维格点一个随机行走者以 $1/d$ 的概率到达 $2d$ 个方向中的一个。Polya 的问题是: 一个随机行走者从原点出发, 最终可否返回起始点? 并由此引发了许多相关问题, 如经几步首次到达某个点的概率? 经几步返回起始点的概率? 令人吃惊的是, 如果没有边界, 随着行走步数的增多, 对 $d=1, d=2$ 答案是肯定的, 当 $d=3$ 时, 答案是否定的^[10]。

无限制的随机行走与布朗运动有着密切的联系。实际上它的极限就是布朗运动, 又因为随机行走不记录历史, 下一步仅依赖于当前的位置, 这一过程很像马尔可夫过程 (Markov process)。目前对随机行走的研究已涉及许多领域、许多学科, 如数值分析于计算、算法设计、离散数学、生物学、化学、物理学等。很多随机行走模型, 以特征函数、傅立叶变换^[15]、递推关系作为工具, 并与马尔可夫过程的理论方法相结合。

1.3 本课题研究的主要内容

概率论的古典概型起源于赌博游戏, 实际中许多问题都可归结为赌博游戏, 如股票交易、抽奖券、买彩票。人们对赌博游戏的随机性充满神秘感, 许多研究者做了大量的工作, 试图发现其中的规律性。下面就是一个赌博游戏 (gambling game): 一位赌徒和一个庄家进行赌博, 假设赌徒有 N 个本金, 每次游戏需要 M 次赌博, 每次赌博赌徒以概率 $1/2$ 赢或输掉一个本金, 那么游戏结束时, 这位赌徒输光的概率是多少? 赢 $K \leq N$ 个本金的概率又是多少? 本文根据一个有趣的赌博游戏, 构建了一个平面上有限步的带有双侧吸收壁的格点上的随机行走模型, 通过运用古典概型的基本理论、公式, 并用母函数, 递推关系矩阵和数学归纳法, 从特殊到一般推导出了质点从起始点出发到达双侧吸收及终点线的概率计算公式, 并给出一些计算机模拟实验。由于现实世界的有限性, 对这一模型的进一步研究将有潜在的应用价值, 有助于股票交易及赌博游戏的预测。

本课题共包括以下 4 章内容:

第 1 章简要论述了本课题研究的目的是、意义、国内外研究现状等;

第 2 章介绍了一些随机行走的基本概念及常见的随机行走模型;

第 3 章根据一个赌博游戏, 构建了一个平面上有限步的带有双侧吸收壁的格点上的随机行走模型, 通过运用古典概型的基本理论、公式, 并用母函数、递推关系和数

学归纳法，从特殊到一般，给出并证明了质点从起始点出发到达双侧吸收及终点线的概率计算公式；

第 4 章是结论与展望。首先，对本文的主要研究内容进行了总结：本文根据一个赌博游戏，构建了一个有限步的带有双侧吸收壁的随机行走模型，通过运用一系列数学方法，推导出了质点从起始点出发到达双侧吸收及终点线的概率计算公式。然后，提出了下一步的工作设想：一方面，研究这一模型在更一般情况下的计算；另一方面，探讨这一模型更广泛的应用领域，以及如何进行预测，预测的度量标准等问题。

第 2 章 常见的随机行走模型

本章主要介绍随机行走的一些基本概念、基本理论及一些常见的随机行走模型，
以期为接下来的研究打下良好基础。

2.1 一些基本概念

整篇文章我们作如下约定：

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

定义 2.1 令 $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一列独立同分布的随机变量，对每个正数 n 令 S_n 表示 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 的和，则序列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为随机行走。

定义 2.2 假定对每个 i , S_i 分别以概率 p 和 $1-p$ 取值 1 和 -1，则我们称序列 $\{S_1, S_2, \dots, S_n, \dots\}$ 为简单随机行走。

定义 2.3 在定义 2.2 中，若 $p=1/2$ ，则 $\{S_1, S_2, \dots, S_n, \dots\}$ 称为简单对称随机行走。

定义 2.4 设 $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ 是一个给定的数列，我们称形式幂级数 $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \dots$ 为数列 $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ 的母函数。

利用母函数根据下述定理 2.1 可求出数列的和。

定理 2.1 设 $\{a_n\}$ 的母函数为 $f(x)$ ，即

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \dots$$

如果记

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

那么数列 $\{s_n\}$ 的母函数为 $\frac{f(x)}{1-x}$ 。

2.2 直线上的随机行走模型

2.2.1 直线上无限制随机行走

假定质点在时刻 0 从原点出发, 以 S_n 记它在时刻 $t=n$ 时的位置。为了使质点在时刻 $t=n$ 位于 k (k 也可以是负整数), 必须而且只需在前 n 次行走中向右行走的次数比向左行走的次数多 k 次, 若以 x 记它在前 n 次行走的次数, y 记向左行走的次数, 则:

$$\begin{cases} x+y=n \\ x-y=k \end{cases}$$

即 $x = \frac{n+k}{2}$, 因为 x 是整数, 因此 k 必须与 n 具有相同的奇偶性。

利用二项分布即得 $P(S_n=k) = C_n^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}}$ 。

当 k 与 n 奇偶性相反时, 概率为 0。

2.2.2 直线上带有一个吸收壁的随机行走

假定质点在时刻 $t=0$ 时, 位于 $x=n$ ($n>0$) 处, 而在 $x=0$ 处有一个吸收壁, 每过一个单位时刻, 质点向右移动的概率为 p , 向左移动的概率为 $q=1-p$, 我们求质点在 $x=0$ 处被吸收的概率。若以 q_n 记质点的初始位置为 n 且最终被在 $x=0$ 吸收的概率, 则显然有 $q_0=1$ 。如果在初始时刻质点位于 $x=n$ ($n>1$), 则它要被 $x=0$ 吸收, 有两种方式来实现: 一种是下一次移动的方向向左, 而最终被 $x=0$ 吸收; 另一种是下一次移动的方向向右, 而最终被 $x=0$ 吸收。则由全概公式得:

$$p_n = p \cdot p_{n+1} + q \cdot p_{n-1} \quad (2-1)$$

若 $p=q$, 令 $q_n = \lambda^n$, 则:

$$\lambda = p\lambda^2 + q$$

由于 $1=p+q$, 则可得: $\lambda=1$ 或 $\lambda=\frac{q}{p}$

所以, $q^n = 1$ 或 $q^n = \left(\frac{q}{p}\right)^n$

当 $p \neq q$ 时,

$q_n = c + d\left(\frac{q}{p}\right)^n$, 由边界条件可得:

$$\begin{cases} c + d = 1 \\ c + d\left(\frac{q}{p}\right)^n = 0 \end{cases}$$

由此得出:

$$c = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}$$

$$d = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}$$

若 $q < p$, 当 n 趋于无穷时, $c = 0$, $d = 1$, 此时

$$p_n = \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

若 $q \geq p$, 当 n 趋于无穷时, $c = 1$, $d = 0$, 此时

$$q_n = 1$$

2.2.3 直线上两端带有吸收壁的随机行走

如图 2-1, 一个醉汉(man)在他的床与离床(bed)三步远的楼梯(stair)顶之间蹒跚。他每走一步, 朝着床走的机会与朝着楼梯走的机会的比是 3:1, 如果他到了位置①, 就会摔下楼梯; 如果他到了位置④, 就一定会睡个好觉。这就是一个直线上两端带有吸收壁的随机行走模型, 位置①和位置④就是两个吸收壁。

(stair)① ②(man) ③ ④(bed)

图 2-1 直线上两端带有吸收壁的随机行走模型

一般的, 假定质点在时刻 $t = 0$ 时, 位于 $x = a$, 而在 $x = 0$ 及 $x = a + b$ 处各有一个

吸收壁，我们用差分方程法来求质点在 $x = 0$ 被吸收、在 $x = 0$ 及 $x = a + b$ 被吸收的概率。若以 p_n 记质点的初始位置为 n 而随机行走被在 0 点的吸收壁吸收的概率，以 q_n 记质点的初始位置为 n 而随机行走被在 $a+b$ 点的吸收壁吸收的概率。

显然，

$$p_{a+b} = 0, \quad q_{a+b} = 1$$

$$p_0 = 1, \quad q_0 = 0$$

如果某时刻质点位于 $x = n$ ，则它要被 $x = 0$ 吸收有两种方式来实现：一种是接下去一次行走是向右的而最后被 $x = 0$ 吸收；另一种是接下去一次行走是向左的而最后被 $x = 0$ 吸收。所以由全概公式有

$$p_n = p \cdot p_{n+1} + q \cdot p_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, a + b - 1 \quad (2-2)$$

这样，我们得到了关于 p_n 的有限差分方程 (2-2)，再利用边界条件就可求得 p_n ，

$n = 1, 2, \dots, a + b - 1$ 。下面我们来求解。

由(2-2)可得

$$q(p_n - p_{n-1}) = p(p_{n+1} - p_n), \quad n = 1, 2, \dots, a + b - 1 \quad (2-3)$$

我们先就 $p = q = \frac{1}{2}$ 来求解上面方程，这相应于对称随机行走的场合。这时

方程成为：

$$(p_n - p_{n-1}) = (p_{n+1} - p_n)$$

若设

$$p_n - p_{n-1} = p_{n+1} - p_n = \dots = p_1 - p_0 = c$$

这里 c 是常数。由此可得：

$$p_n = p_0 + nc$$

由于 $p_0 = 1$ ， $p_{a+b} = 0$ ，故有

$$p_n = 1 - \frac{n}{a+b}$$

因此，从 $x = a$ 而被 $x = 0$ 吸收的概率为：

$$p_a = 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b} \quad (2-4)$$

同样，可求得 $x = a + b$ ，而被 $x = 0$ 吸收的概率为：

$$q_a = \frac{a}{a+b} \quad (2-5)$$

注意： $p_a + q_a = 1$ ，即质点最终一定要吸收。

在一般情况，即 $p \neq q$ 时，由 (2-3) 得：

$$q^n \prod_{k=1}^n (p_k - p_{k-1}) = p^n \prod_{k=1}^n (p_{k+1} - p_k)$$

因此

$$q^n (p_1 - p_0) = p (p_{n+1} - p_n), \quad n = 1, 2, \dots, a+b-1$$

由 $p_0 = 1$ ，得：

$$p_{n+1} - p_n = \left(\frac{q}{p}\right)^n (p_1 - 1), \quad n = 1, 2, \dots, a+b-1 \quad (2-6)$$

因为

$$\begin{aligned} p_{a+b} - p_n &= \sum_{k=n}^{a+b-1} (p_{k+1} - p_k) = \sum_{k=n}^{a+b-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k (p_1 - 1) \\ &= (p_1 - 1) \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \frac{q}{p}} \end{aligned}$$

又 $p_{a+b} = 0$ ，故

$$p_n = (p_1 - 1) \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \frac{q}{p}} \quad (2-7)$$

因 $p_0 = 1$ ，故

$$1 = (p_1 - 1) \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \frac{q}{p}} \quad (2-8)$$

由 (2-7) 和 (2-8) 可得:

$$p_n = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} \quad (2-9)$$

因此, 从 $x = a$ 而被 $x = 0$ 吸收的概率为:

$$p_a = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^b}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}} \quad (2-10)$$

同样, 可求得 $x = a + b$ 而被 $x = 0$ 吸收的概率为:

$$q_a = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} \quad (2-11)$$

注意: $p_a + q_a = 1$, 即质点最终一定要吸收。

另外, 就表达式 (2-10) 及 (2-11) 当 $p = q = 0.5$ 时没有意义, 这时解为 (2-4) 及 (2-5), 但是 (2-4) 及 (2-5) 可从 (2-10) 及 (2-11) 中令 $p \rightarrow q$ 并用洛必达法则得到。

2.2.4 直线上两端带有反射壁的随机行走

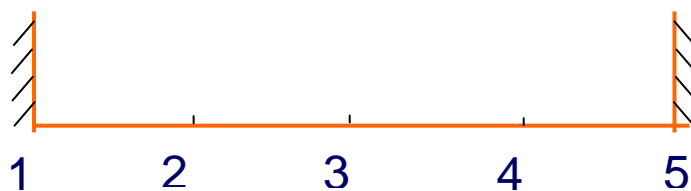


图 2-2 直线上两端带有反射壁的随机行走

如图 2-2 所示，一醉汉 Q (或看作一随机行走的质点) 在直线上的点集 $I=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 作随机行走，且仅在 1 秒、2 秒等时刻行走，行走的概率规则是：如果 Q 现在位于点 i ($1 < i < 5$)，则下一时刻各以 p 的概率向左或向右移动一格，或以 $1-p$ 的概率留在原处；如果 Q 现在处于 1 (或 5) 这一点上，则下一时刻就以概率 1 移动到 2 (或 4) 这一点上，1 和 5 这两点称为反射壁，这种随机行走称为带有两个反射壁的随机行走。

2.3 简单随机行走

令 $X_i, j=1, 2, \dots$ 是独立同分布的随机变量，且 $P(X_i=1)=\alpha$ ， $P(X_i=0)=\beta$ ， $P(X_i=-1)=\gamma$ 。其中 $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ ，且 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ 。随机行走 $S_k = S_0 + \sum_{j=1}^k X_j$ $k=1, 2, \dots, n$ ， $S_n=l$ 是起点在 S_0 ， n 步后到达 l 的简单随机行走。令 $N(r)$ 表示在 $[0, n]$ 内，质点到达高度 r 的次数， $r \geq 0$ 。如果 $S_k = S_{k+1} = S_{k+2} = \dots = S_{k+m} = r$ 且 $S_{k-1} \neq r$ ， $S_{k+m+1} \neq r$ ($0 \leq k \leq k+m \leq n, m \geq 0$)，则仅一次到达高度 r 。图 2-3 就是一个简单随机行走， $N_n(0)=6, N_n(1)=7, N_n(2)=4, N_n(3)=2$ ，且 $S_n=1, N_n(0)=6$ 的简单随机行走的简单路径。

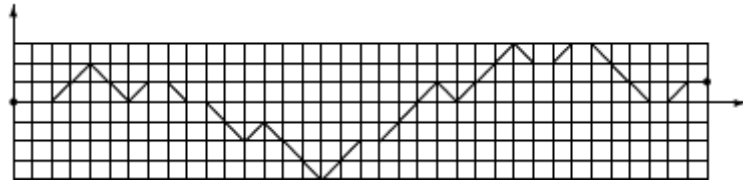


图 2-3 简单随机行走

下面给出一些主要结果^[16-18]

$$P(N_n(r) > k, S_n = l) = 2^k \rho^{k+r+\frac{(l+r)-|l-r|}{2}} \sum_{j \geq 0} \rho^j \binom{-k}{j} \binom{n; \alpha, \beta, \gamma}{n-r-|l-r|-2k-2j} \quad (2-12)$$

其中 $\rho = \alpha / \beta$ ， $\binom{n; \alpha, \beta, \gamma}{k} = [v^k](\alpha v^2 + \beta v + \gamma)^n$ ，又由文献[19]可得：

$$P(S_n = l) = \binom{n; \alpha, \beta, \gamma}{k} = [v^k](\alpha v^2 + \beta v + \gamma)^n \quad (2-13)$$

若 $\alpha = \gamma$ ，则：

$$P(N_n(r) > k, S_n = l) = 2^k \sum_{j \geq 0} \binom{-k}{j} \binom{n; \alpha, \beta, \gamma}{n-r-|l-r|-2k-2j} \quad (2-14)$$

此时为对称随机行走。

若 $\alpha = \gamma = 1/2$ ，则

$$P(N_n(r) > k, S_n = l) = 2^{k-n} \binom{\frac{n-k}{2}}{\frac{n-r-|l-r|}{2}-k} \quad (2-15)$$

由文献[17]给出的公式

$$\binom{n; 1/2, 0, 1/2}{2m} = 2^{-n} \binom{n}{m} \quad (2-16)$$

得到如下的表达式^[20]：

$$P(N_{2n}(0) > k | S_{2n} = 0) = 2^k \frac{\binom{2n-k}{n-k}}{\binom{2n}{n}} \quad (2-17)$$

公式 (1) 的导出是以母函数 $\Phi(k, l, r; y)$ 为基本工具的，

$$\begin{aligned} \Phi(k, l, r; y) &= \sum_{n \geq 0} P(N_n(r) > k, S_n = l) y^n \\ &= 2^k \frac{\rho^r + \frac{(l+r)+|l-r|}{2} v^{r+|l-r|}}{\gamma(1-\rho v^2)} (\alpha v^2 + \beta v + \gamma) \left(\frac{\rho v^2}{1+\rho v^2} \right)^k \end{aligned} \quad (2-18)$$

由此可得^[18,20]：

$$P(N_n(r) > k, S_n = l) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\Phi(k, l, r; y)}{y^{n+1}} dy \quad (2-19)$$

利用代换 $y = g(v) = \frac{v}{\alpha v^2 + \beta v + \gamma}$ ，可得：

$$P(N_n(r) > k, S_n = l) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\Phi(k, l, r; g(v))}{g^{n+1}(v)} g'(v) dv \quad (2-20)$$

定理 2.2 对所有 $r \geq 0, k \geq 0$

$$P(N_n(r) > k, S_n = l) = 2^k \rho^{k+r} \sum_{j \geq 0} \rho^j \binom{-k}{j} \left[\binom{n; \alpha, \beta, \gamma}{n-2k-r-2i-j} + \binom{n; \alpha, \beta, \gamma}{n-2k-r-1-2i-j} \right] \quad (2-21)$$

当 $r = k = 0$ 时，

$$P(N_n(r) > 0) = \sum_{j \geq 0} \rho^j \left[\binom{n; \alpha, \beta, \gamma}{n-j} + \binom{n; \alpha, \beta, \gamma}{n-j-1} \right] \quad (2-22)$$

定理 2.3 $N_n(r)$ 的数学期望由下式确定

$$\begin{aligned} E(N_n(r)) &= \rho^r \sum_{i \geq 0} \rho^i \sum_{j \geq 0} \left[\binom{n; \alpha, \beta, \gamma}{n-r-i-j} + \rho \binom{n; \alpha, \beta, \gamma}{n-r-2-i-j} \right] \\ &= \binom{n; \alpha, \beta, \gamma}{n+r} + \rho^r \frac{1-\rho}{1+\rho} \sum_{j \geq 1} (1-\rho^j) \binom{n; \alpha, \beta, \gamma}{n-r-j} \end{aligned} \quad (2-23)$$

2.4 平面格点上的随机行走

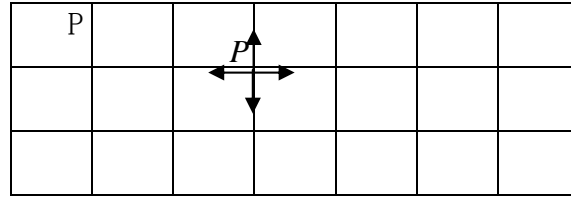


图 2-4 平面格点上的随机行走

如图 2-4 所示，一质点从平面上某点 P 出发，随机的向上、下、左、右方向移动，每次移动一个单位，这种随机行走称为格点上的随机行走。当向上、下、左、右方向移动的概率都为 $1/4$ 时，则为格点上对称的随机行走。例如，一质点从平面上某点出发，等可能的向上、下、左、右方向移动，每次移动一个单位，求经过 $2n$ 次行走后又回到出发点的概率。若要在 $2n$ 次行走后又回到出发点，则向左右行走的次数应该相等，向上下行走的次数也应该相等，而总的行走次数为 $2n$ 次，因此所求概率为：

$$P = \sum_{k+m=n} \frac{(2n)!}{(k!)^2 (m!)^2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} (C_{2n}^n)^2$$

第3章 平面上有双侧吸收壁的随机行走模型及其计算机模拟

在上章对随机行走基本概念、理论和基本模型研究的基础上，本章对带有双侧吸收壁的随机行走古典概率模型进行了研究。主要研究内容为：运用加法原理、乘法原理及组合数运算公式及递推关系，由特殊到一般推导出质点到达吸收壁的计算公式，并给出一些计算机模拟图。

3.1 构建模型

本章中，我们做如下规定：

i) 若 $m > n$ 或 $m < 0$ 则 $C_n^m = 0$;

ii) $[a] = \begin{cases} 0 & a \leq 0 \\ n & n \leq a < n+1, n > 0. \end{cases}$

据第一章所提出的问题，我们可构建如下的数学模型：如图 3-1 所示，平面上一质点从点 $(0, N)$ 出发沿对角线方向随机行走，每次行走质点沿对角线随机地上升或下降一个单位，而后质点继续沿对角线方向随机行走，每次行走质点仍然随机地上升或下降一个单位，质点的运动方向与 x 轴正向的夹角为锐角。 $y=0$ 与 $y=N+K$ 是两个吸收壁， $x=M$ 是终点线，质点一旦到达吸收壁或终点线便停留在该点不再行走。若质点在行走中上升一个单位或下降一个单位的概率均为 $1/2$ ，求出：

- 1) 质点从 $(0, N)$ 出发到达吸收壁 $y=N+K$ 及 $y=0$ 的概率；
- 2) 质点从 $(0, N)$ 出发到达终点线 $x=M$ 的分布律。

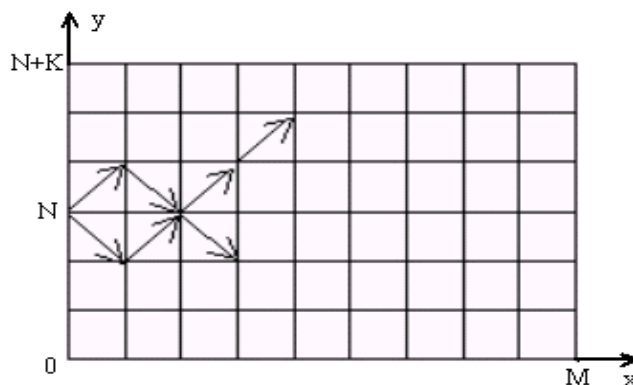


图 3-1 带有双侧吸收壁的古典概型

这一模型实际上是一种随机行走模型，属于简单非对称且有限步的随机行走。这种模型不同于前人研究的许多随机行走模型，它是小样本概率模型，不考虑极限行为。由于现实世界的有限性，我们遇到的大量问题属于有限的问题，因此这一模型具有潜在的应用价值，能用于赌博游戏，股票预测等。下面我们将具体研究这一模型，并求出概率表达式。

3.2 主要结论及推导

这一部分本研究将运用概率计算公式、母函数及递推关系矩阵从特殊到一般分别推出质点到达两条吸收壁及终点线的概率计算公式。

3.2.1 质点到达吸收壁 $y = N + K$ 的概率

3.2.1.1 当 $N \geq \left\lfloor \frac{M-K}{2} \right\rfloor + 1$ 时到达吸收壁 $y = N + K$ 的概率

我们先求在特殊情况下，即 $N \geq \left\lfloor \frac{M-K}{2} \right\rfloor + 1$ 时，质点从点 $(0, N)$ 出发到达吸收壁 $y = N + K$ 和吸收壁 $y = 0$ 的概率，首先求质点从点 $(0, N)$ 出发到达吸收壁 $y = N + K$ 的概率。

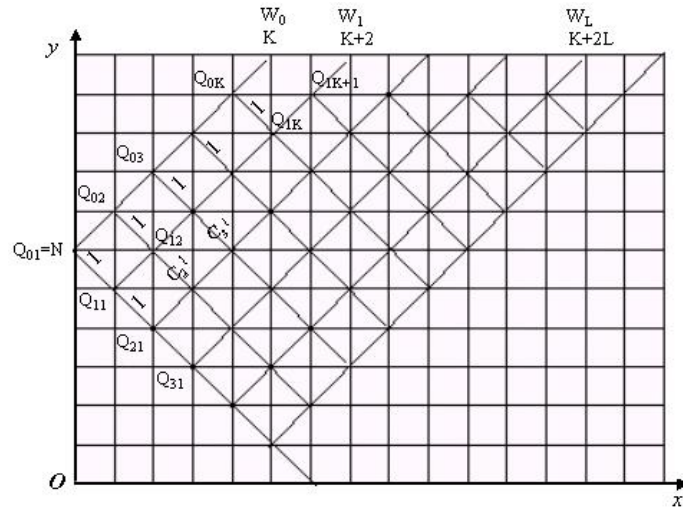


图 3-2 当 $N \geq \left\lfloor \frac{M-K}{2} \right\rfloor + 1$ 时到达吸收壁 $y = N + K$ 的概率

如图 3-2 所示，质点从点 $(0, N)$ 出发到达吸收壁 $y = N + K$ 的概率为质点从点 $(0, N)$ 出发分别到达点 $W_0 = (K, N + K), W_1 = (K + 2, N + K), \dots, W_L = (K + 2L, N + K),$

$\dots, W_{\left\lfloor \frac{M-K}{2} \right\rfloor} = (K + 2\left\lfloor \frac{M-K}{2} \right\rfloor, N + K)$ 的概率的总和。为此，先求出质点从 $(0, N)$ 出发

到达各点: $W_0, W_1, \dots, W_{\lfloor \frac{M-K}{2} \rfloor}$ 的不同路径。质点从 N 出发到达 w_0 只有一条路径且经过了

了 K 个步骤, 由乘法原理可得: 质点从 $(0, N)$ 出发到达 w_0 的概率为 $P_K = \left(\frac{1}{2}\right)^K$; 由

加法定理可得: 质点从 $(0, N)$ 点出发到达 w_1 的路径为第一层结点传给第二层结点不同路径的总和, 第一层共有 K 个结点, 这 K 个结点传给其下一层各一条不同的路径, 故从 $(0, N)$ 到 w_1 共有 K 条路径, 而每条路径经过了 $K+2$ 个步骤, 据加法

原理和乘法原理可得: $P_{K+2} = K \left(\frac{1}{2}\right)^{K+2}$; 一般情况, 第 L 层共有 $(K+L-1)$ 个结点,

根据加法原理可以得出: 从 $(0, N)$ 出发到达 w_L 的路径为第 L 层的 $(K+L-1)$ 结点传给第 $L+1$ 层不同路径的总和, 且每个结点传给下一层的不同路径都是上一层它的所有非上方结点所传不同路径的总和。假设第 L 层的 $(K+L-1)$ 个结点传给第 $L+1$ 层不同路径分别为 $a_{L0}, a_{L1}, \dots, a_{L(K+2L-2)}$, 且 $a_{L0} = 1, a_{Li} = a_{L-1,i-1} + a_{L-1,i} (L=1, 2, \dots;)$,

$a_{L(K+2L-1)} = a_{L(K+2L-2)}$ 。数列 $a_{L0}, a_{L1}, \dots, a_{L(K+2L-2)}$ 生成的母函数为:

$$f_L(x) = a_{L0} + a_{L1}x + \dots + a_{L(K+2L-2)}x^{K+2L-2}$$

从 $(0, N)$ 出发到达 w_L 的路径为母函数 $\frac{f_L(x)}{1-x}$ 中 x^{K+2L-2} 的系数

$a_{L0} + a_{L1} + \dots + a_{L(K+2L-2)}$, 由数学归纳法可得:

$$a_{L0} = C_L^0, a_{L1} = C_L^1, \dots, a_{L(K+2L-1)} = C_{K+2L-1}^{K+L-2}, a_{L(K+2L-2)} = a_{L(K+2L-1)}$$

因此,

$$\begin{aligned} & a_{L0} + a_{L1} + \dots + a_{L(K+2L-2)} \\ &= C_{L-1}^0 + C_L^1 + C_{L+1}^2 + \dots + C_{K+L-2}^{K-1} + (C_{K+L-1}^K - C_{K+2L-4}^0) + \dots + (C_{K+2L-4}^{K+L-3} - C_{K+L-1}^{L-3}) + (C_{K+2L-4}^{K+L-3} - C_{K+L-1}^{L-3}) \\ &= C_{K+2L-2}^{K+L-2} - C_{K+2L-2}^{L-2} = C_{K+2L-2}^L - C_{K+2L-2}^{L-2} \end{aligned}$$

故质点从 N 出发到达吸收壁 $y=N+K$ 的概率为:

$$P_{1,N+K} = \sum_{L=0}^R (C_{K+2L-2}^L - C_{K+2L-2}^{L-2}) \left(\frac{1}{2}\right)^{K+2L}, \text{ 其中 } R = [(M-K)/2]$$

因此，我们得出如下的结论：

定理 3.1 从(0, N)出发沿对角线方向作随机行走的质点，当 $N \geq \left\lceil \frac{M-K}{2} \right\rceil + 1$ 时，

到达吸收壁 $y=N+K$ 的概率为：

$$P_{1,N+K} = \sum_{L=0}^R (C_{K+2L-2}^L - C_{K+2L-2}^{L-2}) \left(\frac{1}{2}\right)^{K+2L} \quad (3-1)$$

其中 $R = \left\lceil \frac{M-K}{2} \right\rceil$ ， N ， K 的意义如图 3-2

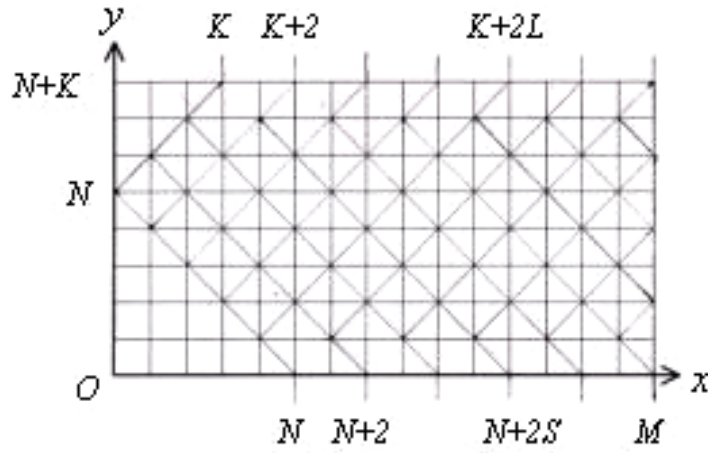


图 3-3 一般情况下到达吸收壁 $y=N+K$ 的概率

3.2.1.2 一般情况下到达吸收壁 $y=N+K$ 的概率

在一般情况下，如图 3-3 所示，我们有如下的结论：

定理 3.2 从(0, N)出发沿对角线方向作随机行走的质点，到达吸收壁 $y=N+K$ 的概率为：

$$P(M, N+K, K) = \sum_{L=0}^R \sum_{i \geq 0} \left[\left(C_{K+2L-2}^{L-i(N+K)} - C_{K+2L-2}^{L-2-i(N+K)} \right) - \left(C_{K+2L-2}^{L-N-i(N+K)} - C_{K+2L-2}^{L-2-N-i(N+K)} \right) \right] \left(\frac{1}{2}\right)^{K+2L} \quad (3-2)$$

其中 $R = \left\lceil \frac{M-K}{2} \right\rceil$ ， N ， K 的意义如图 3-3。

可用如下两种情况的递推关系矩阵来证明。

若 $K+2L-2 < N$ ，递推关系矩阵为：

$$a_{K+2L-2, N+K-2a} = \sum_{i \geq 0} \left[\left(C_{K+2L}^{n+a-i(N+K)} - C_{K+2L}^{n-a-i(N+K)} \right) - \left(C_{K+2L}^{n+a-i(N+K)-N} - C_{K+2L}^{n-a-i(N+K)-N} \right) \right]$$

$$a_{N+2L-2, 0} = \sum_{i \geq 0} \left[\left(C_{N+2L-2}^{L-i(N+K)} - C_{K+2L-2}^{L-2-i(N+K)} \right) - \left(C_{N+2L-2}^{L-i(N+K)-K} - C_{N+2L-2}^{L-2-i(N+K)-K} \right) \right]$$

其中 $(a = 1, 2, \dots, \frac{N+K-2}{2})$ 。

因此可得：

$$\begin{aligned} & P(M, N+K, K) \\ &= \sum_{L=0}^n a_{K+2L-2, N+K} \\ &= \sum_{L=0}^n \sum_{i \geq 0} \left[\left(C_{K+2L-2}^{L-i(N+K)} - C_{K+2L-2}^{L-2-i(N+K)} \right) - \left(C_{K+2L-2}^{L-i(N+K)-K} - C_{K+2L-2}^{L-2-i(N+K)-K} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right)^{K+2L} \end{aligned}$$

3.2.2 质点到达吸收壁 $y=0$ 的概率

求质点从 $(0, N)$ 出发到达吸收壁 $y=0$ 的概率 p_0 ，可归为求到达吸收壁 $y=N+K$ 的概率，只需将 $y=N+K$ 与 $y=0$ 互换，将 N 换为 K ，求出从 $(0, K)$ 出发到达吸收壁 $y=0$ 的概率。

记 T_{N+2L} 为从 $(0, N)$ 出发到达吸收壁 $y=0$ 的路径，则

$$T_{N+2L} = \sum_{i=0}^h \left[\left(C_{N+2L-2}^{L-i(N+K)} - C_{N+2L-2}^{L-2-i(N+K)} \right) - \left(C_{N+2L-2}^{L-K-i(N+K)} - C_{N+2L-2}^{L-2-K-i(N+K)} \right) \right]$$

$$(0 \leq L \leq \left\lfloor \frac{M-N}{2} \right\rfloor)$$

故质点从 $(0, N)$ 出发到达吸收壁 $y=0$ 的概率为：

$$P(N, 0, K) = \sum_{L=0}^Q \sum_{i=0}^h \left[\left(C_{N+2L-2}^{L-i(N+K)} - C_{N+2L-2}^{L-2-i(N+K)} \right) - \left(C_{N+2L-2}^{L-K-i(N+K)} - C_{N+2L-2}^{L-2-K-i(N+K)} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right)^{N+2L} \quad (3-3)$$

$$(Q = \left\lfloor \frac{M-N}{2} \right\rfloor)$$

3.2.3 质点从 N 出发到达终点线 $x=M$ 的分布律

如图 3-4、图 3-5 所示，可分三种情况求出从 N 出发到达终点线 $x=M$ 的分布律。

1) 当 $K \geq M, N \geq M$ 时分布律为：

$$P\{x=M, y=2a\} = C_M^a \left(\frac{1}{2}\right)^M \quad (a=0,1,2,\dots,M) \quad (3-4)$$

2) 当 $N \geq M, K < M$ 时分布律为:

当 $M-K=2n-1$ 时, 分布律为:

$$P\{x=M, y=M+K-(2a+1)\} = (C_M^{n+a} - C_M^{n-a-1}) \left(\frac{1}{2}\right)^M \quad (3-5)$$

$$(a=0,1,2,\dots,\frac{M+K-1}{2})$$

当 $M-K=2n$ 时, 分布律为:

$$P\{x=M, y=M+K\} = (C_M^n - 2C_{M-1}^{n-1}) \left(\frac{1}{2}\right)^M \quad (3-6)$$

$$P\{x=M, y=M+k-2a\} = (C_M^{n+a} - C_M^{n-a}) \left(\frac{1}{2}\right)^M \quad (3-7)$$

$$(a=1,2,\dots,\frac{M+K}{2})$$

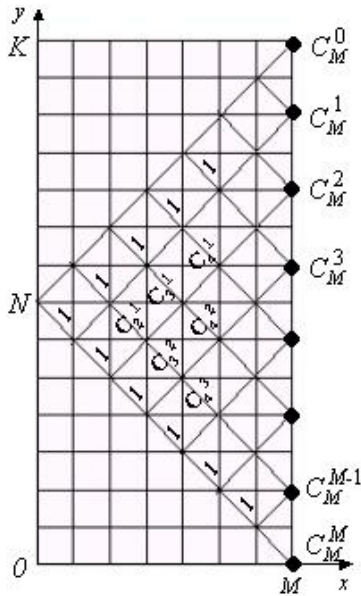


图 3-4 当 $K \geq M, N \geq M$ 时分布律

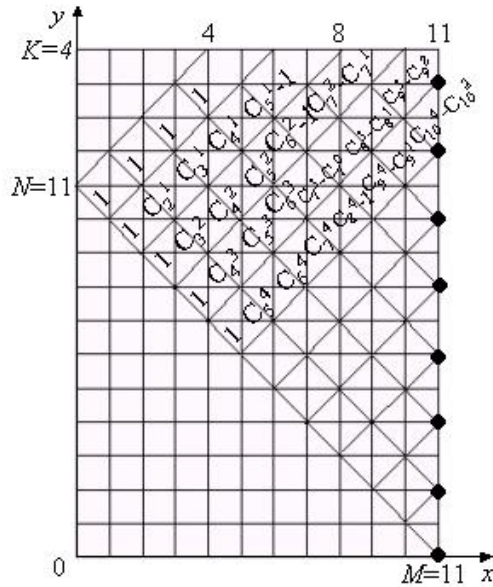


图 3-5 $N \geq M, K < M$ 时分布律

3) 当 $N < M, K < M$ 时分布律为:

① $(M-K), (M-N)$ 均为奇数

如图 3-6, 质点从 $(0, N)$ 出发到达 $x=M$ 的点列为 $z_1, z_2, \dots, z_{\frac{N+K}{2}}$, 分别对应 $x=M+S$

$(S=N+K-1)$ 时的第 $(\frac{M-K-1}{2}+2)$ 层的第 1 (从吸收壁 $y=N+K$ 开始向左下方数) 个结点,

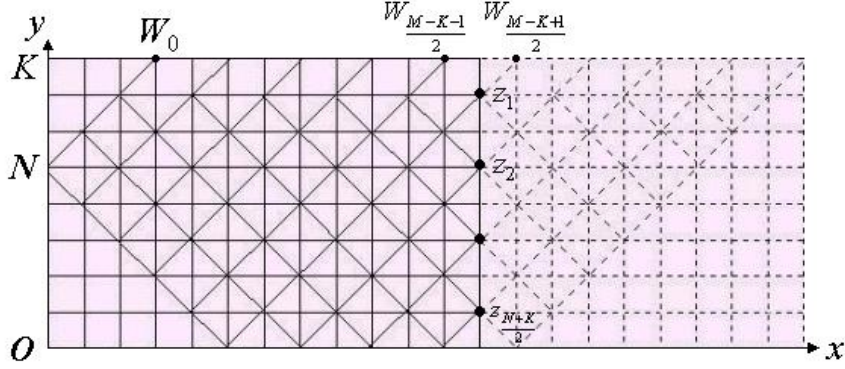


图 3-6 $N < M, K < M$ ($(M-K)$ 、 $(M-N)$ 均为奇数)时分布律

第 $(\frac{M-K-1}{2}+3)$ 层的第 3 (从吸收壁 $y=N+K$ 开始向左下方数) 个结点, \dots , 第

$(\frac{M-K-1}{2}+\frac{N+K+2}{2})$ 层的第最后一个结点。由加法原理可得, 从 $(0, N)$ 出发到

达 z_H ($H=1, 2, \dots, \frac{N+K}{2}$) 的路径为从 $(0, N)$ 出发到达 $w_{\frac{M-K-1}{2}+H}$ 的路径与其上一

层结点少传路径 (经虚线传过来的路径) 的差, 仿照一般情况下计算路径的方法,

可得出如下结论:

设 $M-K=2n-1, M-N=2q-1$, 其中 n 和 q 都是正整数。

$$P\{x=M, y=N+K-1\} = \sum_{i \geq 0} \left[\left(C_{M-1}^{n-i(N+K)} - C_{M-1}^{n-2-i(N+K)} \right) - \left(C_{M-1}^{n-i(N+K)-N} - C_{M-1}^{n-2-i(N+K)-N} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right)^M \quad (3-8)$$

$$P\{x=M, y=N+K-(2a+1)\} = \sum_{i \geq 0} \left[\left(C_M^{n+a-i(N+K)} - C_M^{n-a-1-i(N+K)} \right) - \left(C_M^{n+a-i(N+K)-N} - C_M^{n-a-1-i(N+K)-N} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right)^M \quad (3-9)$$

$$(a=1, 2, \dots, \frac{N+K-4}{2})$$

$$P\{x=M, y=1\}$$

$$= \sum_{i \geq 0} \left[\left(C_{M-1}^{q-i(N+K)} - C_{M-1}^{q-2-i(N+K)} \right) - \left(C_{M-1}^{q-i(N+K)-N} - C_{M-1}^{q-2-i(N+K)-N} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right)^M \quad (3-10)$$

同理，可得出其它三种情况的结论：

② $(M-K)$ 为偶数， $(M-N)$ 为奇数

设 $M-K=2n$ ， $M-N=2q-1$ ，其中 n 和 q 都是正整数

$$P\{x=M, y=N+K\} \\ = \sum_{i \geq 0} \left[\left(C_{M-2}^{n-i(N+K)} - C_{M-2}^{n-2-i(N+K)} \right) - \left(C_{M-2}^{n-i(N+K)-N} - C_{M-2}^{n-2-i(N+K)-N} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right)^M \quad (3-11)$$

$$P\{x=M, y=N+K-2a\} \\ = \sum_{i \geq 0} \left[\left(C_M^{n+a-i(N+K)} - C_M^{n-a-i(N+K)} \right) - \left(C_M^{n+a-i(N+K)-N} - C_M^{n-a-i(N+K)-N} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right)^M \quad (3-12)$$

$$(a=1, 2, \dots, \frac{M+K-3}{2})$$

$$P\{x=M, y=1\} \\ = \sum_{i \geq 0} \left[\left(C_{M-1}^{q-i(N+K)} - C_{M-1}^{q-2-i(N+K)} \right) - \left(C_{M-1}^{q-i(N+K)-N} - C_{M-1}^{q-2-i(N+K)-N} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right)^M \quad (3-13)$$

③ $(M-K)$ 为奇数， $(M-N)$ 为偶数

设 $M-K=2n-1$ ， $M-N=2q$ ，其中 n 和 q 都是正整数

$$P\{x=M, y=0\} \\ = \sum_{i=0}^t \left[\left(C_M^{q-i(N+K)} - 2C_{M-1}^{q-1-i(N+K)} \right) - \left(C_M^{q-i(N+K)-K} - 2C_{M-1}^{q-1-i(N+K)-K} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right)^M \quad (3-14)$$

$$(t = \left\lfloor \frac{q}{N+K} \right\rfloor + 1)$$

$$P\{x=M, y=N+K-(2a-1)\} \\ = \sum_{i=0}^t \left[\left(C_M^{n+a-i(N+K)} - C_M^{n-a-1-i(N+K)} \right) - \left(C_M^{n+a-i(N+K)-N} - C_M^{n-a-1-i(N+K)-N} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right)^M \quad (3-15)$$

$$(a=1, 2, \dots, \frac{N+K-1}{2}), \quad t = \left\lfloor \frac{n+a}{N+K} \right\rfloor + 1$$

④ $(M-K)$ 为偶数, $(M-N)$ 为偶数

设 $M-K=2n$, $M-N=2q$, 其中 n 和 q 都是正整数

$$P\{x=M, y=0\} = \sum_{i \geq 0} \left[\left(C_{M-2}^{q-i(N+K)} - C_{M-2}^{q-2-i(N+K)} \right) - \left(C_{M-2}^{q-i(N+K)-K} - C_{M-2}^{q-2-i(N+K)-K} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right)^M \quad (3-16)$$

$$P\{x=M, y=N+K\} = \sum_{i \geq 0} \left[\left(C_{M-2}^{n-i(N+K)} - C_{M-2}^{L-2-i(N+K)} \right) - \left(C_{M-2}^{L-i(N+K)-N} - C_{M-2}^{n-2-i(N+K)-N} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right)^M \quad (3-17)$$

$$P\{x=M, y=N+K-2a\} = \sum_{i \geq 0} \left[\left(C_M^{n+a-i(N+K)} - C_M^{n-a-i(N+K)} \right) - \left(C_M^{n+a-i(N+K)-N} - C_M^{n-a-i(N+K)-N} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \right)^M \quad (3-18)$$

$$(a=1, 2, \dots, \frac{N+K-2}{2})$$

3.3 计算机模拟

本部分中, 通过给出一些模拟实验以描述这一模型的随机行走过程, 从直观上给出一些概率的结果。可以看到, 模拟实验结果与定理 3.2 中概率的计算结果是一致的。

通过产生随机数, 我们分别对两种情况做了 1000 次模拟试验, 第一种情况是 $M=40$, $K=3$, $N=17$, 图 3-7 给出了这一情况下两次模拟实验的模拟图, 表 1 给出了这一情况下, 1000 次模拟实验的结果, 运用定理 3.2, 我们可以得到 $P(y=3+17)=0.6358$, $P(y=0)=0.0062$, $P(x=40)=0.3580$, 这些数值与表 1 的结果是一致的; 第二种情况是 $M=40$, $K=10$, $N=10$, 图 3-8 为这一情况下两次模拟实验的模拟图, 表 2 为这一情况下 1000 次模拟实验的结果, 运用定理 3.2, 我们可以得到 $P(y=10+10)$, $P(y=0)$ 和 $P(x=40)$ 分别为 0.1173, 0.1173 和 0.7654, 这些数值与表 2 的结果是一致的。

表 1 $M=40, N=17, K=3$ 时的结果

	$y=17+3$	$y=0$	$x=40$
次数	633	8	359

表 2 $M=40, N=10, K=10$ 时的结果

	$y=10+10$	$y=0$	$x=40$
次数	117	119	764

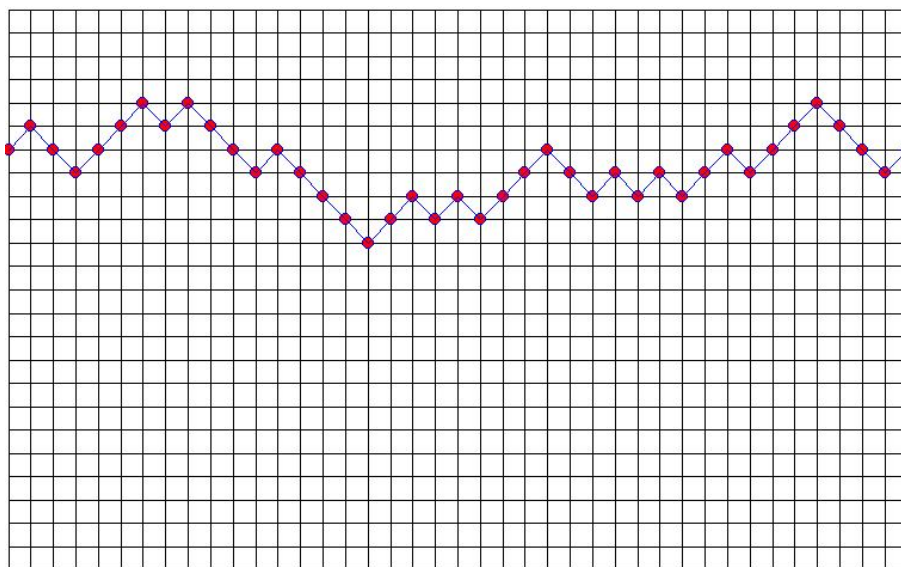


图 3-7(a). $M=40, K=3$ 和 $N=17$ 时的一种模拟结果

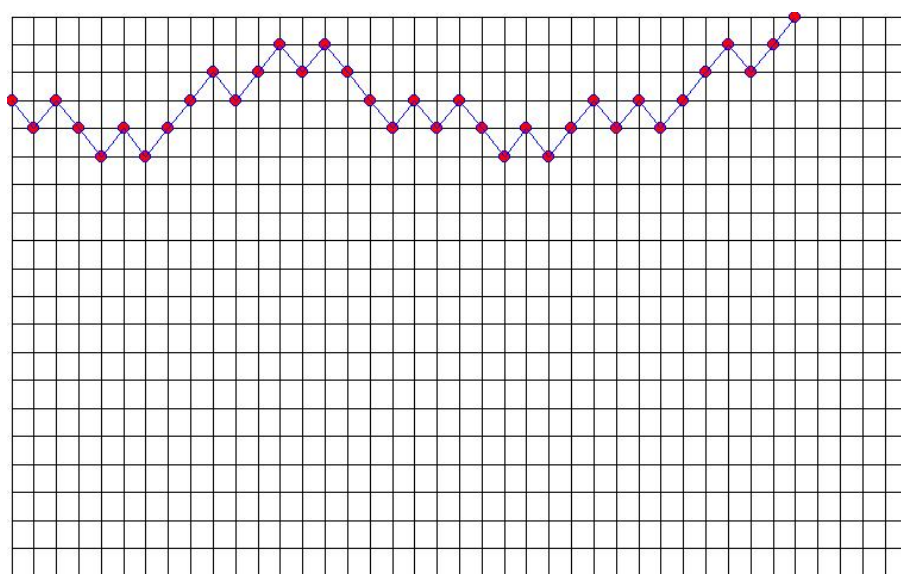


图 3-7 (b). $M=40, K=3$ and $N=17$ 时的一种模拟结果

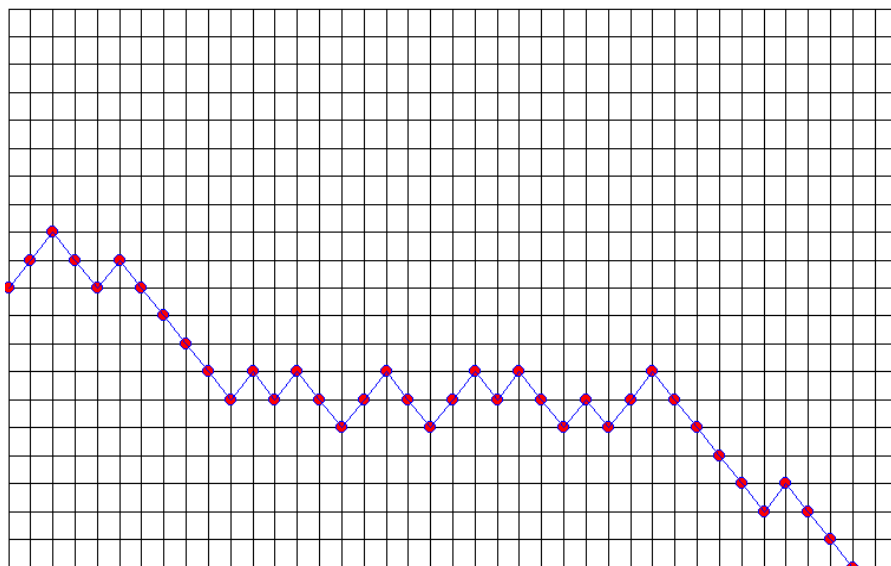


图 3-8(a). $M=40$, $K=10$ and $N=10$ 时的一种模拟结果

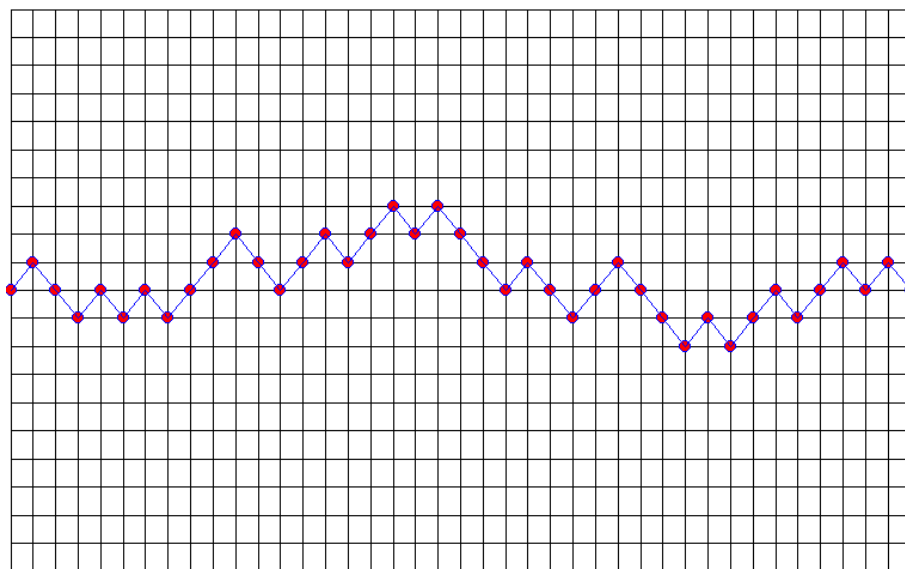


图 3-8(b). $M=40$, $K=10$ and $N=10$ 时的一种模拟结果

第4章 结论与展望

由于实际的需要,随机行走模型得到广泛深入的研究。目前,已有许多随机行走模型,但大多数随机行走模型都是无限步的,而且考虑其极限行为。由于现实世界的有限性,研究格点上的有限步的随机行走更具有实际意义和应用价值。本文即根据这一实际需要,从一个赌博游戏出发,构建了一个有限步的带有双侧吸收壁的随机行走模型,通过运用一系列数学方法,推导并证明了质点从起始点出发到达双侧吸收壁及终点线的概率计算公式。

下一步的工作设想:一方面,研究这一模型在更一般情况下的计算,如随机行走者的行走服从下列分布律: $\begin{pmatrix} 0 & m/4 & 2m/4 & 3m/4 & m \\ 0.05 & 0.15 & 0.6 & 0.15 & 0.05 \end{pmatrix}$; 另一方面,探讨这一模型更广泛的应用领域,以及如何进行预测,预测的度量标准等问题。

参考文献

- [1] T. S. Ferguson. Who solved the secretary problem [J]. Statistical Science, 1989, 4:282-296.
- [2] I. F. Akyildiz, Yi-Bing Lin, Wei-Ru Lai et al. A new random walk model for PCS networks [J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2000, 18(7):1254-1260.
- [3] K. Chaudhuri, Yangru Wu. Random walk versus breaking trend in stock prices: Evidence from emerging markets [J]. Journal of Banking & Finance, 2003, 27(4):575-592.
- [4] A. M. Gandjbakhche, R. Nossal, R. F. Bonner. Scaling relationships for theories of anisotropic random walks applied to tissue optics [J], Appl. Opt. 1993, 32:504-516.
- [5] 严士健, 王隽骧, 刘秀芳. 概率论基础 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.
- [6] 蒋庆琅著, 方积乾(译). 随机过程原理与生命科学模型 [M]. 上海:上海翻译出版公司, 1987. 132~216.
- [7] S. A. Kalikow. Generalized random walks in random environments [J]. Ann. Probab. , 1981, 9: 753~768.
- [8] H. E. Stanley, E. Guyon. Random Materials and Processes [M]. North-Holland: Elsevier Science, 1994.
- [9] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [10] G. H. Weiss. Aspects and Applications of the Random Walk [M], North-Holland: Elsevier Science, 1994.
- [11] R.F.Bsaa, T.Kumagai. Laws of the iterated logarithm for the range of random walks in two and three dimensions [J].Ann. Prob.30, 1369-1396, 2002.
- [12] G.Barnes, U.Feige. Short random wlaks on graphs [J], SIAM J. Disc. Math. 1996, 9(1):19-28.
- [13] J.L.Palacios, J.M.Renom. Random walks on graphs [J], Statist. Probab. Lett, 1998, 37: 29-34.
- [14] 毕秋香. 半直线上随机环境中的随机游动的若干性质 [J]. 应用概率统计, 1997, 13(2):120-124.
- [15] M. Dwass. Simple random walk and rank order statistics [J]. Ann. Math. Statist.,

- 1967, 38:1042-1053.
- [16] W. Katzenbeisser, W. Panny. Asymptotic results on the maximal deviation of simple random walks [J]. Stochastic Processes Appl., 1984, 18:263-275.
- [17] Kanwer. On some combinational relations concerning the symmetric random walk [J]. Publ. Math. Inst. Hungarian Acad. Sci., 1965, 9:335-337.
- [18] W. Feller. An Introduction to Probability Theory and its Applications [M]. New York: Wiley, 1968.
- [19] W. Bohm, W. Panny. Simple random walk statistics. Part II: Continuous time results [J]. Journal of Applied Probability, 1996, 33:331-339.
- [20] K. L. Chung, W. Feller. Fluctuations in coin tossing [C], Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1949, 35:605-608.

致 谢

值此论文完成之际，首先向我的导师王熙照教授表示最诚挚的感谢！这篇论文从选题、撰写到完成，点点滴滴都凝聚了导师的至诚关怀和悉心指导。导师严于律己、宽容正直的处世风范，严谨、思辨和实事求是的治学态度以及孜孜不倦的工作作风，为我今后的学习、工作树立了光辉的榜样。

在本论文的完成过程中，我的众位师兄、师姐和同学都给予我很多的帮助，在此对他们提出的宝贵意见表示衷心的感谢！这份弥足珍贵的友谊将使我受益终生！

感谢我的爱人，是她无私的付出和默默的支持才让我顺利地完成了学业！最后，向对论文进行评审并提出宝贵意见的各位专家表示深深的谢意！

攻读硕士学位期间科研工作情况

发表的论文

- [1] 张国春, 王亮, 陈亚婷. 母函数与随机行走模型 [J]. 河北大学学报(自然科学版). 2009.11(6):570-573.

平面上的一种随机行走模型及其计算机模拟

作者: [张国春](#)
学位授予单位: [河北大学](#)

本文链接: http://d.g.wanfangdata.com.cn/Thesis_D078674.aspx